Asservissements avec un retard pur :

« Prédicteur de Smith » et approximation de Padé.

1 Introduction

Un retard pur limite souvent la bande passante d'une boucle d'asservissement. Le *prédicteur de Smith* consiste à ajouter au signal d'erreur un signal obtenu par une copie du système à asservir multiplié par la fonction $1 - retard$. Le correcteur peut alors être conçu comme si le retard n'existait pas, la somme donnant le système sans retard.

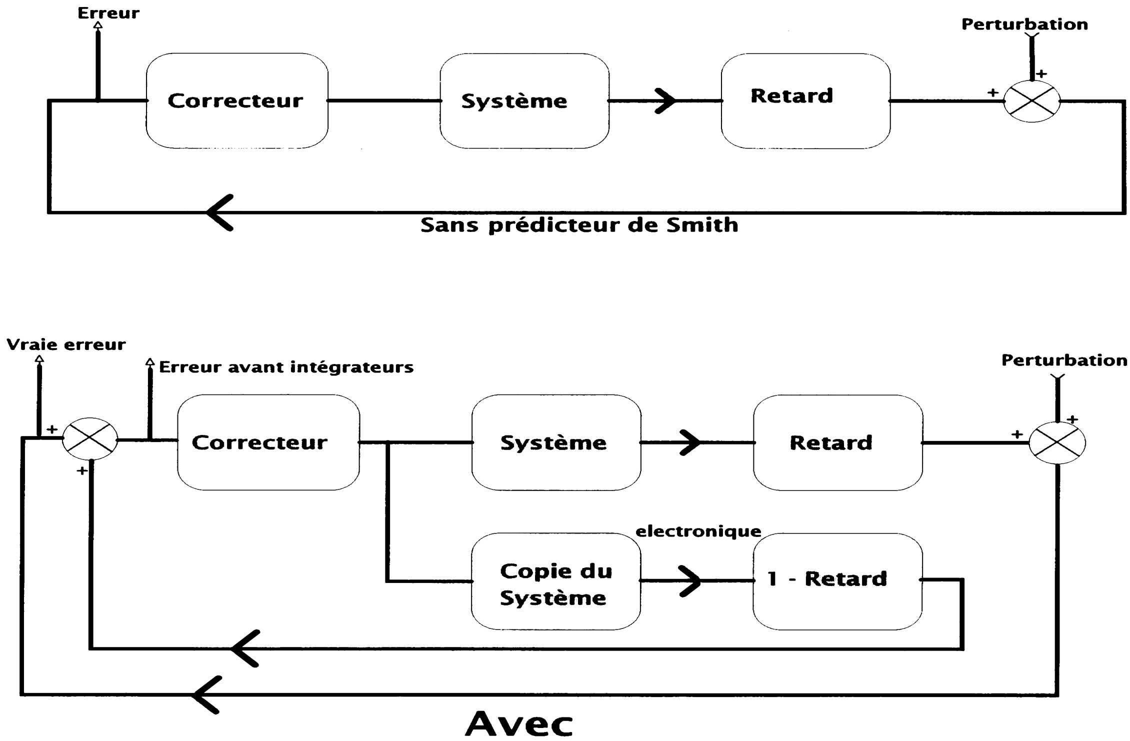


FIGURE 1 – Schéma bloc

2 Approximation d'un retard pur par la méthode de Padé

Cette méthode consiste à approximer[1] la fonction e^{-p} par une fraction rationelle en p, dont le module vaut toujours 1. Ainsi,

$$P_1(p) = \frac{1 - \frac{p}{2}}{1 + \frac{p}{2}}; \qquad P_2(p) = \frac{1-\frac{1}{2}p+\frac{1}{12}p^2}{1+\frac{1}{2}p+\frac{1}{12}p^2}$$

$$P_3(p) = \frac{1 - \frac{1}{2}p + \frac{1}{10}p^2 - \frac{1}{120}p^3}{1 + \frac{1}{2}p + \frac{1}{10}p^2 + \frac{1}{120p^3}}; \quad P_4(p) = \frac{1-\frac{1}{2}p+\frac{3}{28}p^2-\frac{1}{84}p^3+\frac{1}{1680}p^4}{1+\frac{1}{2}p+\frac{3}{28}p^2+\frac{1}{84}p^3+\frac{1}{1680}p^4}$$

3 Réalisation de l'ordre 4 en électronique analogique

Soit :

$$Q_4(p) = 1 - P_4(p) = \frac{p + \frac{1}{42}p^3}{1 + \frac{1}{2}p + \frac{3}{28}p^2 + \frac{1}{84}p^3 + \frac{1}{1680}p^4} \tag{1}$$

En factorisant le dénoninateur avec le logiciel Gnuplot [1] on obtient :

$$Q_4(p) = \frac{p}{1 + \frac{p}{.522\times 6.047} + (\frac{p}{6.047})^2} \times \frac{1 + (\frac{p}{6.48})^2}{1 + \frac{p}{.806\times 6.778} + (\frac{p}{6.778})^2} \tag{2}$$

(les coefficients ont été arrangés sous la forme plus familière ω et Q.)

Comme le Q du terme de gauche du dénominateur est voisin de .5 on peut approximer ce terme par :

$$(1 + \frac{p}{6.047})^2 \tag{3}$$

La fraction de gauche peut donc facilement se réaliser avec des filtres R-C et C-R en cascade séparés par un suiveur (penser à amplifier le signal d'un coefficent 6.047 quelque part).

Pour la fraction de droite de $Q_4(p)$ des simulations [2] de la boucle fermée nous ont montré qu'on pouvait sans inconvénient confondre les ω du numérateur et du dénominateur. Cette fraction se réalise simplement avec un circuit diviseur R et L-C série pour des retards jusqu'à 1ms environ. Pour des retards plus importants l'inductance devient encombrante et il vaut mieux utiliser un filtre actif à « variables d'état » [2] ou... envisager une solution numérique.

4 Simulation de la boucle fermée pour un exemple simple

On suppose un ensemble correcteur-systeme dont la fonction de transfert est limitée à un intégrateur $H(p) = k * \frac{1}{p}$ associé à un retard de 1 seconde. Si on n'utilise pas de prédicteur de Smith, on peut calculer facilement que la boucle fermée entre en oscillation pour $k > \frac{\pi}{2}$, soit fréquence de la boucle=.25 Hz.

Le prédicteur de Smith d'ordre 4 permet d'obtenir la même hauteur du pic de résonance pour $k = 6$ que pour $k = .67$ sans ce prédicteur. La bande passante de la boucle se trouve donc augmentée du facteur correspondant.

1. J'ai simplement crée un tableau de valeurs numériques avec la forme polynome d'ordre 4 et fait un fit avec la forme factorisée.
2. « simulation » est un bien grand mot étant donné que les équations s'écrivent explicitement. Un logiciel de « plot » est suffisant.

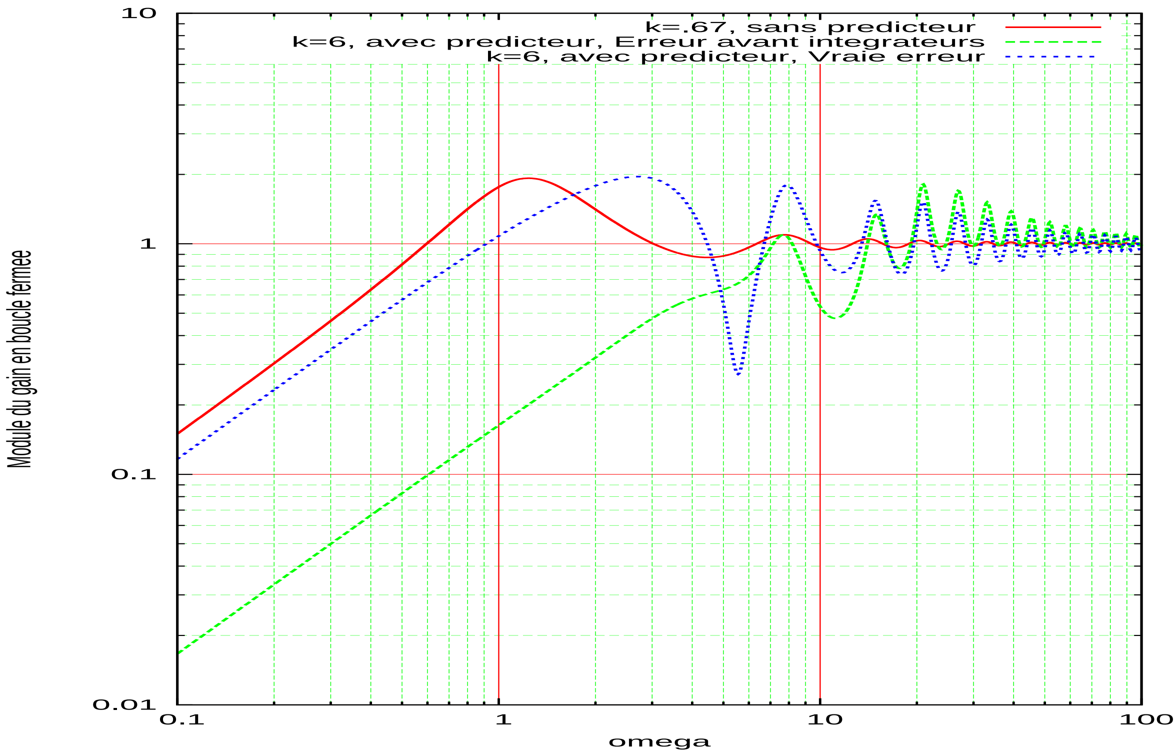


FIGURE 2 – Module de $\frac{erreur}{perturb}$ en boucle fermée

Les courbes représent non pas le vrai signal d'erreur, mais celui à l'entrée du correcteur. On peut monter que si l'ensemble correcteur-système se réduit à un simple intégrateur, le vrai signal d'erreur varie peu en fonction de k. En effet, on peut montrer que :

$$\frac{erreur}{perturb} = \frac{1 - Smith \times Correcteur}{1 - Correcteur} \tag{4}$$

Si on réalise le prédicteur exact sans l'approximation de Padé, on a $Smith(p) = 1 - e^{-p}$ et donc :

$$\frac{erreur}{perturb} = \frac{1 + \frac{p}{k} - e^{-p}}{1 + \frac{p}{k}} \approx p(1 + \frac{1}{k}) \tag{5}$$

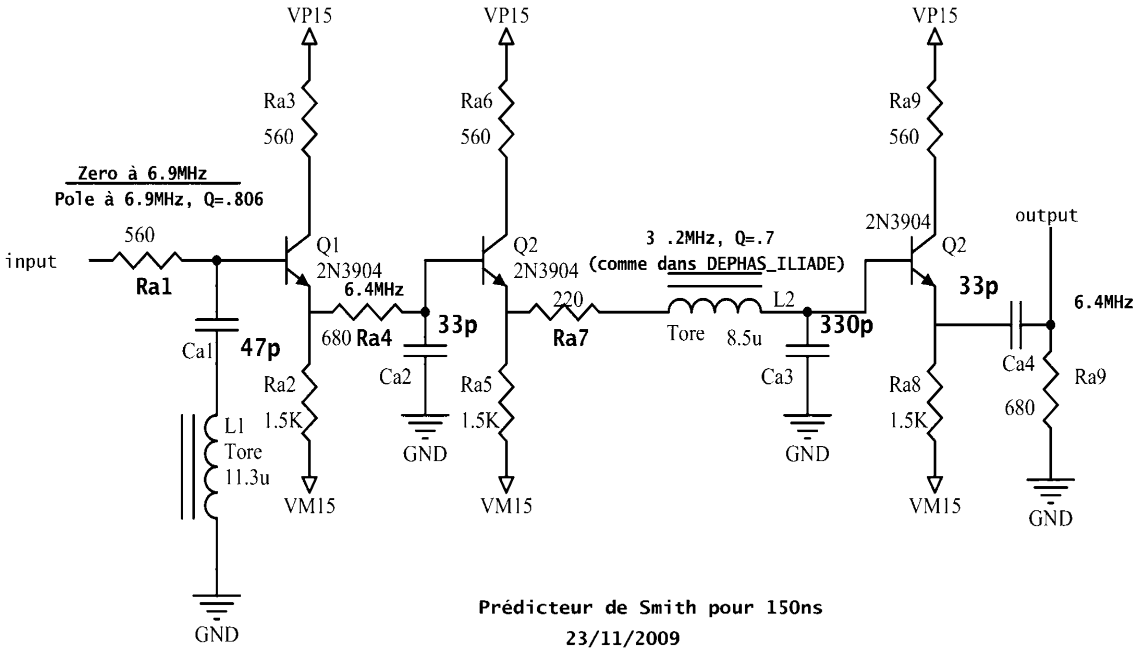
en basses fréquences, et non pas $\frac{p}{k}$.

Par contre s'il existe un coude en $1/f^4$ on peut rapprocher ce coude proportionnellement à l'accroissement de bande passante obtenu [3]. Aux fréquences bien en dessous de ce coude, on obtient un facteur 9^3 de réduction de la perturbation.

3. S'il y a de la demande j'ajouterai les plots correspondants.

5 Exemple de schéma électronique

Cet exemple corrige un retard de 150 ns. Il a fallu reproduire un pôle double à 3.2 MHz existant dans le système (« Retour » est pris en entrée du buffer pour la voie électro-optique).




```
Si on veut faire un beau document ce serait bien de rajouter le spectre de
bruit d'une manip réelle avec et sans prédicteur de Smith.
```

Références

[1] M.Vajta : *Some remarks on Padé-approximations*, 3^{rd} TEMPUS-INTCOM Symposiumn September 9-14, 2000, Vezpr''em, Hungary.

[2] Jean-Pierre Coulon : *Analog filters : the "state-variable" method*, Note VIR-015A-07.